Rückblick Kombinatorik : Pizza-Aufgabe

Wie viele verschiedene Pizze (Tomate und Mozzarella ist auf jeder Pizza – zählt nicht als "Belag") kann man kreieren, wenn man aus 7 verschiedenen Zutaten 3 auswählt?
Zutaten: C - P - T - S - O - Z - A

Möglichkeiten (_ | _ | _)
Für die erste Zutat hat man 7 Möglichkeiten,
für die zweite dann noch 6 Möglichkeiten (keine Zutat doppelt),
für die dritte Stelle dann noch 5
$\Rightarrow$ 7 * 6 * 5 Möglichkeiten

Davon sind aber geschmacklich einige gleich, z.B. (C | O | Z) schmeckt wie (Z | O | C) usw.
Für jede Auswahl der 3 Zutaten gibt es 3 * 2 * 1 Möglichkeiten der Reihenfolge, sie auf die Pizza zu verteilen

Insgesamt also: $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}$ Möglichkeiten.

Fakultät- Schreibweise: $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

damit $\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = \frac{(7\cdot 6\cdot 5)\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}{(3\cdot 2\cdot 1)\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!}$

Wie viele verschiedene Pizze (Tomate und Mozzarella ist auf jeder Pizza – zählt nicht als "Belag") kann man kreieren, wenn man aus n verschiedenen Zutaten k auswählt?
analog zu oben:

„ Anzahl der Pizze mit k aus n Zutaten “ : $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$ (sprich „ n über k“)

Bernoulli-Experimente

Mit den Beobachtungen aus den Aufgaben S. 94

Bernoulli Experimente

Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit **zwei Ergebnissen (**meist „Treffer“ oder „Niete“), also
$\Omega = \{ T, N \}$ mit $p = P(\{T\})$ und $q = 1 - p = P(\{N\})$

Wenn ein Bernoulli-Experiment mehrmals (n-mal) durchgeführt wird, spricht man von einem n-stufigen Bernoulli-Experiment (**Bernoulli-Kette** der Länge n).
$\Omega_i = \{ T, N \}$ und $\Omega = \Omega_i \times \Omega_i \times \Omega_i \times \ldots \times \Omega_i$

Wahrscheinlichkeit von genau k Treffern bei n Versuchen, also k Treffer und (n-k) Nieten.

$$P(\text{genau k Treffer bei n Versuchen}) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Begründung:
Jeder Pfad eines günstigen Ergebnisses ω liefert nach der ersten Pfadregel die Wahrscheinlichkeit $P(\omega) = p^k\cdot(1-p)^{n-k}$
zur Anwendung der zweiten Pfadregel muss nun noch geklärt werden, wie viele günstige Ergebnisse es gibt.
Anzahl der günstigen Ergebnisse: $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$ (vgl. Pizza-Aufgabe)
nach der zweiten Pfadregel muss man die Summe der Einzelnen Ergebnisse addieren. Da aber hier jedes Ergebnis die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, muss man die Einzelwahrscheinlichkeit mit der Anzahl der Ergebnisse multiplizieren.

Viele Aufgaben kann man auf ein Bernoulli-Experiment zurückführen, wenn man eine Ergebnisraum konstruiert, der nur aus zwei Ergebnissen (z.B. Treffer und Niete) mit bekannter Wahrscheinlichkeit besteht