

## Extremwertaufgabe: Eine Tensegrity-Figur (A. Bauer)

Tensegrity-Figuren wurden Mitte des 20. Jh. vom Künstler Kenneth Snelson und dem Architekten Buckminster Fuller entwickelt. Sie weisen eine außerordentliche Stabilität bei sehr geringem Gewicht auf. Der Name ist ein amerikanisches Kunstwort aus den Worten *tensional integrity*, wobei *tension* der englische Fachbegriff für eine Krafteinwirkung durch Zug (im Gegensatz zur Druckkraft) ist.

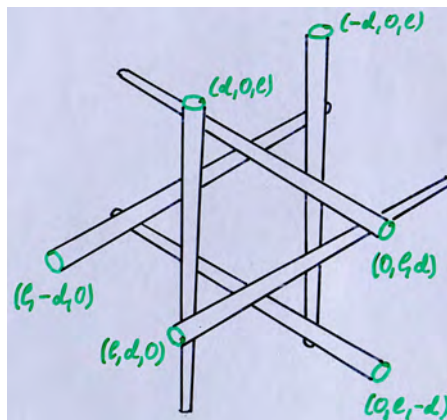
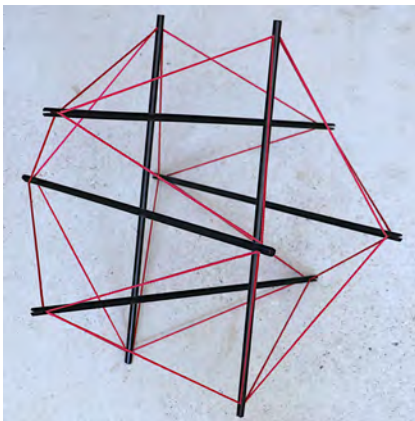
Gründe für die Stabilität:

1. Alle nur auf Zug beanspruchten Teile sind als Seile ausgeführt, Stäbe werden nur verwendet, wenn zusätzlich Druckkräfte auftreten. Im Allgemeinen berühren sich zwei Stäbe nicht.
2. Aufgrund eines Extremalprinzips ist eine bestimmte Konstellation von Stablängen, Stababständen und Seillängen (besonders) stabil.

Auch wenn dieses Konstruktionsprinzip die damit verbundenen Hoffnungen nicht erfüllen und sich in der Folgezeit nicht durchsetzen konnte, soll hier an einem Beispiel untersucht werden, inwieweit hier ein Extremalprinzip wirksam ist.

Beispiel:

Betrachten Sie sechs Stäbe der Länge  $2\ell$  (siehe Abb.), wobei der Abstand zweier paralleler Stäbe  $2d$  beträgt. Benachbarte Endpunkte (und nur diese) sind jeweils mit einem Seil verbunden.



Aufgaben:

1. Vergewissern Sie sich, dass aufgrund der Symmetrie der Stabanordnung alle Seilverbindungen zwischen benachbarten Endpunkten gleich lang sind. Nehmen Sie sich Zeit, die Figur in ihrem Aufbau zu verstehen.  
Stellen Sie dann eine Formel für die Seillänge  $s$  zwischen zwei benachbarten Eckpunkten in Abhängigkeit von  $\ell$  und  $d$  auf, also einen Term für  $s(\ell, d)$ .
2. Dieser Term enthält eine Wurzel. Zur leichteren weiteren Rechnung verwenden Sie besser das Quadrat  $y(\ell, d) = s^2(\ell, d)$ , so dass Sie nun eine Formel ohne Wurzel vor sich haben.  
Um die Rechnung noch weiter zu vereinfachen, kann man einen bestimmten Wert für  $\ell$  annehmen, da sich größere oder kleinere Figuren nur im Maßstab, nicht aber in der Stabilität unterscheiden werden. Setzen Sie in Ihrer Formel  $\ell = 23$  [cm].
3. Die so bestimmte Funktion  $y(d) = s^2(d)$  ist eine quadratische Funktion. Untersuchen Sie diese Funktion auf Extremwerte.  
Machen Sie sich auch Gedanken, welche Werte  $d$  sinnvoller Weise annehmen kann. Prüfen Sie, ob Randextrema vorliegen können.
4. Berechnen Sie die für eine stabile Figur nötige gesamte Seillänge (der Durchmesser der Stäbe soll vernachlässigt werden) und überlegen Sie, was Ihr Ergebnis aus 3. im Sachzusammenhang bedeutet.

## Lösungen

1.) Analytische Geometrie (Abstand zweier Punkte)

$$\text{z.B. } \begin{pmatrix} l \\ d \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l-d \\ d \\ -l \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} s(l, d) &= \sqrt{\begin{pmatrix} l-d \\ d \\ -l \end{pmatrix}^2} = \sqrt{(l-d)^2 + d^2 + l^2} = \sqrt{l^2 - 2dl + d^2 + d^2 + l^2} = \\ &= \underline{\underline{\sqrt{2d^2 - 2dl + 2l^2}}}; \end{aligned}$$

$$2.) y(l, d) = 2d^2 - 2dl + 2l^2$$

$$y(d) = 2d^2 - 46d + 1058$$

$$3.) y'(d) = 4d - 46$$

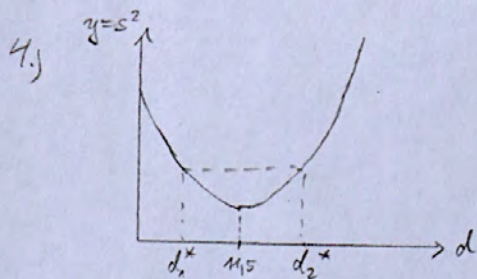
$$y''(d) = 4$$

$$\text{notwendig: } y'(d) = 0 \Leftrightarrow 4d - 46 = 0 \Leftrightarrow d = 11,5 \text{ [cm]}$$

$$\text{hinreichend: } y''(11,5) = 4 > 0 \Rightarrow y(d) \text{ hat bei } d = 11,5 \text{ cm ein lokales Minimum.}$$

Randextrema?  $d \in [0; +\infty[$ , wobei  $d=0$  eine andere Figur darstellt,

also vielleicht besser  $d \in ]0; +\infty[$ , damit keine Randextrema möglich



$y(d) = s^2(d)$ , also das Quadrat der Seillänge zwischen benachbarten Eckpunkten hat für  $d = 11,5 \text{ cm}$  ein Minimum. Da die Quadratwurzelfunktion  $f(x) = \sqrt{x}$  streng monoton

zunehmend ist, gilt dies auch für die Seillänge  $s(d)$ . Sie beträgt

$$\text{in diesem Fall } s(11,5) = \sqrt{2 \cdot 11,5^2 - 46 \cdot 11,5 + 1058} = \frac{23}{2} \sqrt{6} \approx 28,169 \text{ [cm]}$$

$$\text{und damit die gesamte Seillänge } s_{\text{ges}} = 24 \cdot s \approx 6,76 \text{ m}$$

Es gilt  $d = 11,5 \text{ cm} = \frac{1}{2} l$ . Wählt man für  $d$  eine andere Länge als  $\frac{1}{2} l = 11,5 \text{ cm}$ , so gibt es bei unveränderter Seillänge einen zweiten passenden Wert für  $d$  und die Figur ist nicht stabil (Skizze:  $d_1^*$  und  $d_2^*$ ).