

Herzlich willkommen in der dritten Woche „Homeoffice“

Hier ist wieder der „Hefteintrag“, den ihr gerne einfach ausdrucken dürft. Wenn ihr beim Nachvollziehen der mathematischen Schritte Fragen habt, müsst ihr mir einfach eine e-mail schreiben.

Für das erste Kapitel sind ziemlich viele Aufgaben beigefügt, weil man dieses Thema nur anhand von vielen Aufgaben in seiner Vielseitigkeit erfassen kann. Auch hier gilt natürlich per e-mail nachfragen, falls etwas unklar ist.

Im zweiten Kapitel sind nur zwei Aufgaben angehängt, da diese Aufgaben immer nach dem gleichen Prinzip ablaufen! Wenn ihr mehr Aufgaben dazu machen möchtet sucht euch einfach im Fokus oder Metzler noch welche aus und schickt mir eure Lösung zur Korrektur.

Viel Erfolg und bleibt gesund!

Mit freundlichen Grüßen Maren Bauer

VI.4. Die Zerfallsgesetze

Wdh aus der Mittelstufe:

$$\text{Aktivität } A \quad A = -\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\frac{\text{Anzahl der Zerfälle}}{\text{Zeiteinheit}}$$

$$[A] = 1\text{Bq} = 1/\text{s} \quad (1 \text{ Becquerel} = 1 \text{ Zerfall pro Sekunde})$$

Halbwertszeit $T_{1/2} :=$ „Zeit nach der die Hälfte der ursprünglichen Kerne zerfallen ist“

Herleitung Zerfallsgesetz:

$A \sim N$ (die Aktivität A ist proportional zu der Anzahl N der noch vorhandenen Kerne)

$$-\frac{\Delta N}{\Delta t} \sim N \quad (\text{Die Definition für A ist eingesetzt})$$

$$\Rightarrow -\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda \cdot N(t) \quad \lambda \text{ ist die Zerfallskonstante (hängt von der Halbwertszeit ab) und ist hier als Proportionalitätsfaktor verwendet worden.}$$

$$[\lambda] = 1/\text{s} \quad (\text{Die Einheit ist } 1/\text{s})$$

$$\Rightarrow -\dot{N} = \lambda \cdot N(t) \quad \text{ist eine Differentialgleichung (Ableitung und Funktion stehen in einer Gleichung)}$$

Lösung der DGL ergibt das Zerfallsgesetz: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

Mit dem Zerfallsgesetz lassen sich die noch vorhandenen Kerne nach einer bestimmten Zeit berechnen.

Test der Lösung: $N(t)$ ableiten nach t , dann erhält man die Differentialgleichung.

Zusammenhang der Halbwertszeit mit der Zerfallskonstanten:

$$N\left(T_{\frac{1}{2}}\right) = \frac{N_0}{2} \quad \text{und} \quad N(T_{1/2}) = N_0 \cdot e^{-\lambda T_{1/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\lambda T_{1/2} \quad \text{Erinnerung: } \ln 0,5 = -\ln 2 \quad \text{und} \quad \ln 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Daraus folgt auch das Aktivitätsgesetz: $A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$

Mit dem Aktivitätsgesetz lassen sich zu einem bestimmten Zeitpunkt die Zerfälle pro Sekunde berechnen.

$$\text{Es gilt: } A(t) = -\dot{N}(t) \text{ und } A_0 = \lambda \cdot N_0$$

Aufgaben:

Metzler	S.71/1
	S.71/2
	S.71/3
	S.71/4
	S.71/5

VI.5. Anwendung

VI. 5.1. Altersbestimmung mit Hilfe radioaktiver Nuklide

Erinnerung: $N_A(t)$ sind die noch vorhandenen Kerne nach der Zeit t des Elements A

Buch: Metzler Seite 70 und 71

(A) Mathematische Grundlagen

Radioaktiver Zerfall: $A \rightarrow B$ ($T_{1/2}$, B stabil)

Aus der Zerfallsgleichung $N_A(t) = N_A(0) \cdot e^{-\lambda t}$ und $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ ergibt sich durch Umformung:

$$t = -\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{N_A(t)}{N_A(0)}\right) = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{N_A(0)}{N_A(t)}\right)$$

Angenommen $N_B(0) = 0$, so gilt zu jedem Zeitpunkt: $N_A(0) = N_A(t) + N_B(t)$

$$\text{also: } \frac{N_A(0)}{N_A(t)} = \frac{N_A(t) + N_B(t)}{N_A(t)} = 1 + \frac{N_B(t)}{N_A(t)} \Rightarrow \boxed{t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln\left(1 + \frac{N_B(t)}{N_A(t)}\right)}$$

Der Quotient $\frac{N_B(t)}{N_A(t)}$ wird mittels Massenspektroskopie ermittelt, wobei die besten

Resultate ermittelt werden können, wenn der Quotient ≈ 1 , d.h. wenn $t \approx T_{1/2}$

(B) Uran-Blei-Methode

Zur Bestimmung langer Zeiten (Erdalter): $t = 10^9 \text{a}$ bis 10^{10}a

\Rightarrow Verwendung von Nukliden mit großer Halbwertszeit wie zum Beispiel:

^{238}U ($T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9 \text{ a}$) oder ^{235}U ($T_{1/2} = 7,1 \cdot 10^9 \text{ a}$) oder ^{232}Th ($T_{1/2} = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ a}$).

Speziell : (Kern A) $^{238}\text{U} \rightarrow \dots \rightarrow ^{206}\text{Pb}$ (Kern B)

Bestimmung von $\frac{N_B(t)}{N_A(t)}$ aus Gesteinsproben mit Hilfe von Spektroskopie

Formel: $t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln\left(1 + \frac{N_{\text{Pb}}(t)}{N_{\text{U}}(t)}\right)$ Hiermit wird das Alter des Gesteins berechnet!

Annahmen: 1) $N_B(0) = 0$ Blei war am Anfang nicht vorhanden!

2) Während der Zeit t werden keine Mutterkerne nachgebildet

(C) C-14 - Methode (Radiokarbonmethode)

Zur Bestimmung von Zeiträumen zwischen 1000a - 10000a

Natürliche Kohlenstoffisotope: ^{12}C , ^{13}C (stabil) ^{14}C (radioaktiv)

In der Atmosphäre entstehen unter dem Einfluss der kosmischen Strahlung Neutronen, die hauptsächlich mit Stickstoffkernen reagieren: $^{14}_7\text{N} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{14}_6\text{C} + {}^1_1\text{p}$.

^{14}C ist radioaktiv und zerfällt mit einer Halbwertszeit von $T_{1/2} = 5730 \text{ a}$: $^{14}_6\text{C} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + {}^0_{-1}\text{e}^- + {}^0_0\bar{\nu}$

Zwischen radioaktivem und stabilem Kohlenstoff stellt sich in der Atmosphäre ein Gleichgewicht ein. Man nimmt an, dass die letzten 20000a das Verhältnis in der Atmosphäre und damit in allen lebenden Organismus $\frac{N_{\text{C-14}}}{N_{\text{C-12}}}$ konstant war. Dadurch haben alle lebenden Organe eine Aktivität von $A = 15 \text{ Zerfälle/min. pro 1g Kohlenstoff}$.

Lebende Organismen nehmen C über CO_2 auf. Sobald sie sterben, endet dieser Aufnahmeprozess und die radioaktiven Kohlenstoffisotope zerfallen nur noch, d.h. $\frac{N_{\text{C-14}}}{N_{\text{C-12}}}$ nimmt ab (Zerfallsgesetz!).

Soll das Alter eines abgestorbenen Organismus bestimmt werden, muss also der Quotient $\frac{N_{\text{C-14}}}{N_{\text{C-12}}}$ des toten Organismus bestimmt werden und mit dem Quotienten der Atmosphäre verglichen werden.

Jedes Lebewesen besitzt damit eine C-14 - Uhr !

(D) Tritium-Methode

Für sehr kurze Zeiten ($T_{1/2} = 12,3\text{a}$) , z.B. Weinalterbestimmung

Aufgaben: Metzler Seite 71/7 und Seite 71/11