

Mathematik

# Abiturprüfung 2014

## Prüfungsteil A

Arbeitszeit: 90 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.**

<hr/> <p>Name des Prüflings</p>
---------------------------------

**Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.**

## Analysis

### Aufgabengruppe 1

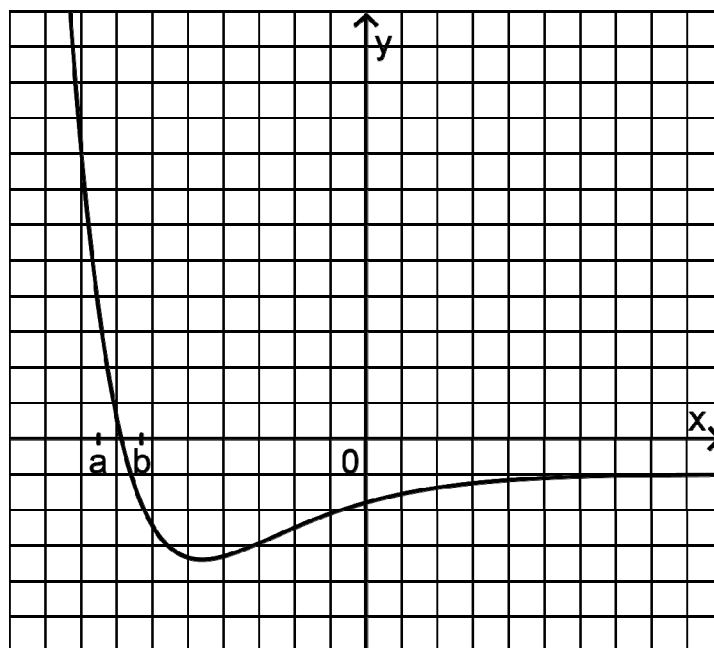
Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

- 5    **1** Gegeben ist die Funktion  $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$  mit Definitionsmenge  $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ . Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von  $f$ .
- 2    **2** Gegeben ist die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^x \cdot (2x + x^2)$ .
- 2        **a)** Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion  $f$ .
- 3        **b)** Zeigen Sie, dass die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $F$  mit  $F(x) = x^2 \cdot e^x$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion  $G$  von  $f$  an, für die  $G(1) = 2e$  gilt.
- 3    **3** Gegeben sind die in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $g_{a,c} : x \mapsto \sin(ax) + c$  mit  $a, c \in \mathbb{R}_0^+$ .
- 3        **a)** Geben Sie für jede der beiden folgenden Eigenschaften einen möglichen Wert für  $a$  und einen möglichen Wert für  $c$  so an, dass die zugehörige Funktion  $g_{a,c}$  diese Eigenschaft besitzt.
- $\alpha$ )** Die Funktion  $g_{a,c}$  hat die Wertemenge  $[0; 2]$ .
- $\beta$ )** Die Funktion  $g_{a,c}$  hat im Intervall  $[0; \pi]$  genau drei Nullstellen.
- 2        **b)** Ermitteln Sie in Abhängigkeit von  $a$ , welche Werte die Ableitung von  $g_{a,c}$  annehmen kann.

(Fortsetzung nächste Seite)

4 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion  $f$ .



- 2 a) Beschreiben Sie für  $a \leq x \leq b$  den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion von  $f$ .
- 3 b) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen einer Stammfunktion von  $f$  im gesamten dargestellten Bereich.

# Stochastik

## Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

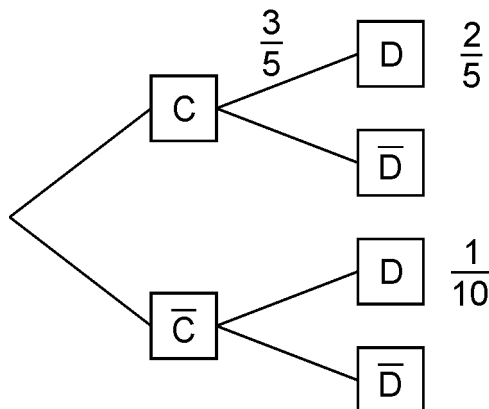
BE

- 1** In Urne A befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Urne B enthält drei rote und zwei weiße Kugeln. Betrachtet wird folgendes Zufallsexperiment:

Aus Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt; danach wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne A gelegt.

- 2** a) Geben Sie alle Möglichkeiten für den Inhalt der Urne A nach der Durchführung des Zufallsexperiments an.
- 3** b) Betrachtet wird das Ereignis E: „Nach Durchführung des Zufallsexperiments befinden sich wieder drei weiße Kugeln in Urne A.“ Untersuchen Sie, ob das Ereignis E eine größere Wahrscheinlichkeit als sein Gegenereignis hat.

- 2** Das Baumdiagramm gehört zu einem Zufallsexperiment mit den Ereignissen C und D.



- 1** a) Berechnen Sie  $P(\bar{D})$ .
- 2** b) Weisen Sie nach, dass die Ereignisse C und D abhängig sind.
- 2** c) Von den im Baumdiagramm angegebenen Zahlenwerten soll nur der Wert  $\frac{1}{10}$  so geändert werden, dass die Ereignisse C und D unabhängig sind. Bestimmen Sie den geänderten Wert.

## Geometrie

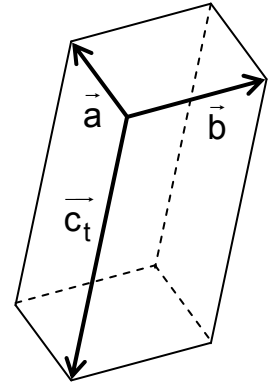
### Aufgabengruppe 2

Diese Aufgaben dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B bearbeitet werden.

BE

- 1 Die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\vec{c}_t = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$  spannen für

jeden Wert von  $t$  mit  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  einen Körper auf. Die Abbildung zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von  $t$ .



- 2 a) Zeigen Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind.
- 3 b) Bestimmen Sie diejenigen Werte von  $t$ , für die der jeweils zugehörige Quader das Volumen 15 besitzt.
- 2 Eine Kugel besitzt den Mittelpunkt  $M(-3 | 2 | 7)$ . Der Punkt  $P(3 | 4 | 4)$  liegt auf der Kugel.
- 3 a) Der Punkt  $Q$  liegt ebenfalls auf der Kugel, die Strecke  $[PQ]$  verläuft durch deren Mittelpunkt. Ermitteln Sie die Koordinaten von  $Q$ .
- 2 b) Weisen Sie nach, dass die Kugel die  $x_1x_2$ -Ebene berührt.

10

# Mathematik

# Abiturprüfung 2014

## Prüfungsteil B

Arbeitszeit: 180 Minuten

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als Hilfsmittel verwendet werden

- die vom Staatsministerium genehmigte Merkhilfe für das Fach Mathematik,
- eine der vom Staatsministerium zugelassenen stochastischen Tabellen,
- eine der vom Staatsministerium für Leistungserhebungen zugelassenen naturwissenschaftlichen Formelsammlungen,
- ein Taschenrechner, der hinsichtlich seiner Funktionalität den vom Staatsministerium getroffenen Regelungen entspricht.

Zu den Themengebieten Analysis, Stochastik und Geometrie wählt der Fachausschuss jeweils eine Aufgabengruppe zur Bearbeitung aus. **Die zu einer Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil B dürfen nur in Verbindung mit den zur selben Aufgabengruppe gehörenden Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet werden.**

<hr/> <p>Name des Prüflings</p>
---------------------------------

**Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist abzugeben.**

**Analysis**  
**Aufgabengruppe 1**

BE

Gegeben ist die Funktion  $f: x \mapsto 2 - \sqrt{12 - 2x}$  mit maximaler Definitionsmenge  $D_f = ]-\infty; 6]$ . Der Graph von  $f$  wird mit  $G_f$  bezeichnet.

- 5 **1 a)** Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von  $G_f$  mit den Koordinatenachsen. Bestimmen Sie das Verhalten von  $f$  für  $x \rightarrow -\infty$  und geben Sie  $f(6)$  an.

- 5 **b)** Bestimmen Sie den Term der Ableitungsfunktion  $f'$  von  $f$  und geben Sie die maximale Definitionsmenge von  $f'$  an.

Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow 6} f'(x)$  und beschreiben Sie, welche Eigenschaft von  $G_f$  aus diesem Ergebnis folgt.

$$(zur\ Kontrolle: f'(x) = \frac{1}{\sqrt{12 - 2x}})$$

- 2 **c)** Geben Sie das Monotonieverhalten von  $G_f$  und die Wertemenge von  $f$  an.

- 3 **d)** Geben Sie  $f(-2)$  an und zeichnen Sie  $G_f$  unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein (Platzbedarf im Hinblick auf die folgenden Aufgaben:  $-3 \leq y \leq 7$ ).

- 4 **e)** Die Funktion  $f$  ist in  $D_f$  umkehrbar. Geben Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f$  an und zeigen Sie, dass  $f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$  gilt.

Der Graph der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $h: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4$  ist die Parabel  $G_h$ . Der Graph der in Aufgabe 1e betrachteten Umkehrfunktion  $f^{-1}$  ist ein Teil dieser Parabel.

- 3 **2 a)** Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von  $G_h$  mit der durch die Gleichung  $y = x$  gegebenen Winkelhalbierenden  $w$  des I. und III. Quadranten.

*(Teilergebnis: x-Koordinaten der Schnittpunkte: -2 und 4)*

- 4 **b)** Zeichnen Sie die Parabel  $G_h$  – unter Berücksichtigung des Scheitels – im Bereich  $-2 \leq x \leq 4$  in Ihre Zeichnung aus Aufgabe 1d ein. Spiegelt man diesen Teil von  $G_h$  an der Winkelhalbierenden  $w$ , so entsteht eine herzförmige Figur; ergänzen Sie Ihre Zeichnung dementsprechend.

*(Fortsetzung nächste Seite)*

**3** Durch die in Aufgabe 2 entstandene herzförmige Figur soll das abgebildete Blatt modellhaft beschrieben werden. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem aus Aufgabe 1d soll dabei 1 cm in der Wirklichkeit entsprechen.



- 5**     **a)** Berechnen Sie den Inhalt des von  $G_h$  und der Winkelhalbierenden  $w$  eingeschlossenen Flächenstücks. Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Werts den Flächeninhalt des Blatts auf der Grundlage des Modells.
- 6**     **b)** Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an  $G_h$  im Punkt  $(-2 | h(-2))$ . Berechnen Sie den Wert, den das Modell für die Größe des Winkels liefert, den die Blattränder an der Blattspitze einschließen.
- 3**     **c)** Der Verlauf des oberen Blattrands wird in der Nähe der Blattspitze durch das bisher verwendete Modell nicht genau genug dargestellt. Daher soll der obere Blattrand im Modell für  $-2 \leq x \leq 0$  nicht mehr durch  $G_h$ , sondern durch den Graphen  $G_k$  einer in  $\mathbb{R}$  definierten ganzrationalen Funktion  $k$  dritten Grades beschrieben werden. Für die Funktion  $k$  werden die folgenden Bedingungen gewählt ( $k'$  und  $h'$  sind die Ableitungsfunktionen von  $k$  bzw.  $h$ ):
- I**     $k(0) = h(0)$
  - II**    $k'(0) = h'(0)$
  - III**    $k(-2) = h(-2)$
  - IV**    $k'(-2) = 1,5$

Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass die Wahl der Bedingungen I, II und III sinnvoll ist. Machen Sie plausibel, dass die Bedingung IV dazu führt, dass die Form des Blatts in der Nähe der Blattspitze im Vergleich zum ursprünglichen Modell genauer dargestellt wird.



**Stochastik**  
**Aufgabengruppe 2**

BE

**1** In einem Supermarkt erhalten Kunden abhängig vom Wert ihres Einkaufs eine bestimmte Anzahl von Päckchen mit Tierbildern, die in ein Sammelalbum eingeklebt werden können. Jedes Päckchen enthält fünf Bilder. Im Sammelalbum sind Plätze für insgesamt 200 verschiedene Bilder vorgesehen. Die Bilder werden jeweils in großer Stückzahl mit der gleichen Häufigkeit produziert und auf die Päckchen zufällig verteilt, wobei sich die Bilder in einem Päckchen nicht unterscheiden müssen.

**2**     **a)** Begründen Sie, dass der Term  $\frac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197 \cdot 196}{200^5}$  die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass sich in einem Päckchen fünf verschiedene Tierbilder befinden.

**3**     **b)** Einem Jungen fehlen in seinem Sammelalbum noch 15 Bilder. Er geht mit seiner Mutter zum Einkaufen und erhält anschließend zwei Päckchen mit Tierbildern. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Päckchen nur Bilder enthalten, die der Junge bereits in seinem Sammelalbum hat.

Bei Kindern besonders beliebt sind die 3D-Bilder, auf denen die Tiere dreidimensional erscheinen. 20 der 200 für ein Sammelalbum vorgesehenen Bilder sind 3D-Bilder.

**5**     **c)** Ermitteln Sie, wie viele Päckchen ein Kind mindestens benötigt, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens ein 3D-Bild zu erhalten.

**2** Um Geld für die Ausstattung des örtlichen Kindergartens einzunehmen, veranstaltet der Supermarkt ein Gewinnspiel. Die fünf Sektoren des dabei eingesetzten Glücksrads sind von 1 bis 5 durchnummeriert. Die Größe der Sektoren ist direkt proportional zum Zahlenwert der Nummern; beispielsweise ist der Sektor mit der Nummer 3 dreimal so groß wie der Sektor mit der Nummer 1. Nachdem der Spieler sechs Euro bezahlt hat, wird das Glücksrad einmal gedreht. Erzielt der Spieler eine der Nummern 1 bis 4, so wird ihm der zugehörige Zahlenwert als Betrag in Euro ausgezahlt, erzielt er die Nummer 5, so erhält er eine Eintrittskarte für einen Freizeitpark im Wert von fünfzehn Euro.

*(Fortsetzung nächste Seite)*

- 3 a) Bestimmen Sie die Größe des Öffnungswinkels des Sektors mit der Nummer 1 sowie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spieler bei einem Spiel eine Eintrittskarte gewinnt.

*(Teilergebnis: Größe des Öffnungswinkels:  $24^\circ$ )*

- 4 b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Auszahlung pro Spiel, wenn der Gewinn einer Eintrittskarte mit einer Auszahlung von fünfzehn Euro gleichgesetzt wird. Interpretieren Sie das Ergebnis.

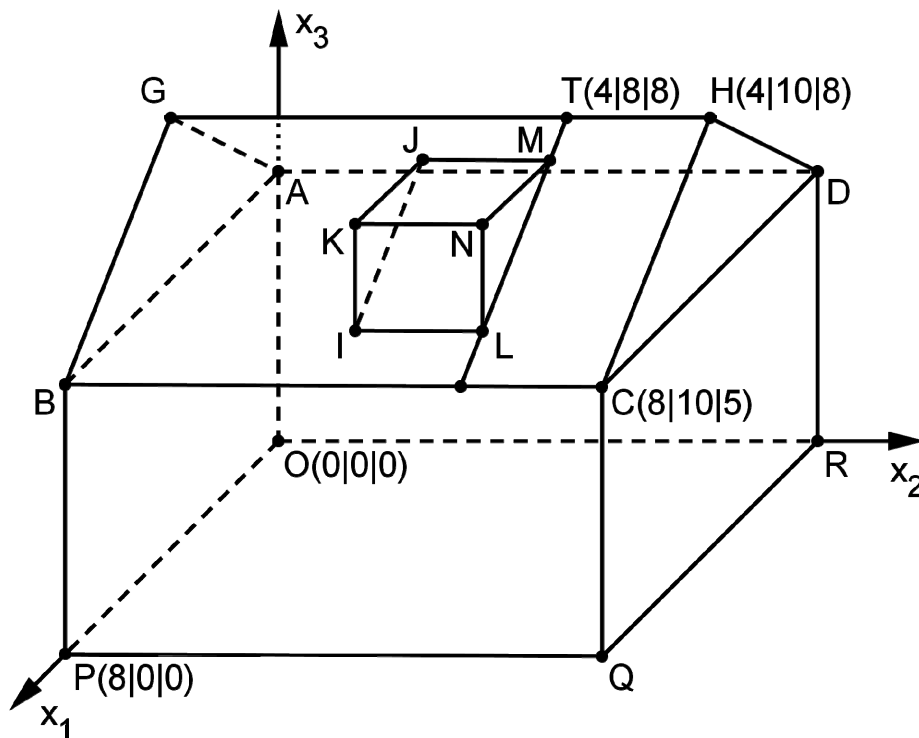
- 3 c) Der Supermarkt muss für jede Eintrittskarte nur zehn Euro an den Freizeitpark bezahlen. Damit ist bei der Spielaktion ein finanzieller Überschuss zu erwarten, der an den örtlichen Kindergarten gespendet werden soll. Ermitteln Sie den zu erwartenden Überschuss, wenn man davon ausgeht, dass das Spiel insgesamt 6000-mal durchgeführt wird.

## Geometrie

### Aufgabengruppe 2

BE

Die Abbildung zeigt modellhaft ein Einfamilienhaus, das auf einer horizontalen Fläche steht. Auf einer der beiden rechteckigen Dachflächen soll eine Dachgaube errichtet werden. Die Punkte A, B, C, D, O, P, Q und R sind die Eckpunkte eines Quaders. Das gerade dreiseitige Prisma LMNIJK stellt die Dachgaube dar, die Strecke  $[GH]$  den First des Dachs, d. h. die obere waagrechte Dachkante. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m, d. h. das Haus ist 10 m lang.



- 2 a) Berechnen Sie den Inhalt derjenigen Dachfläche, die im Modell durch das Rechteck BCHG dargestellt wird.
- 3 b) In der Stadt, in der das Einfamilienhaus steht, gilt für die Errichtung von Dachgauben eine Satzung, die jeder Bauherr einhalten muss. Diese Satzung lässt die Errichtung einer Dachgaube zu, wenn die Größe des Neigungswinkels der Dachfläche des jeweiligen Hausdachs gegen die Horizontale mindestens  $35^\circ$  beträgt. Zeigen Sie rechnerisch, dass für das betrachtete Einfamilienhaus die Errichtung einer Dachgaube zulässig ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

Die Dachfläche, auf der die Dachgaube errichtet wird, liegt im Modell in der Ebene  $E: 3x_1 + 4x_3 - 44 = 0$ .

Die Dachgaube soll so errichtet werden, dass sie von dem seitlichen Rand der Dachfläche, der im Modell durch die Strecke  $[HC]$  dargestellt wird, den Abstand 2 m und vom First des Dachs den Abstand 1 m hat. Zur Ermittlung der Koordinaten des Punkts M wird die durch den Punkt  $T(4 | 8 | 8)$  verlaufende

Gerade  $t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ , betrachtet.

5      **c)** Begründen Sie, dass  $t$  in der Ebene  $E$  verläuft und von der Geraden  $HC$  den Abstand 2 besitzt.

3      **d)** Auf der Geraden  $t$  wird nun der Punkt  $M$  so festgelegt, dass der Abstand der Dachgaube vom First 1 m beträgt. Bestimmen Sie die Koordinaten von  $M$ .

*(Ergebnis:  $M(4,8 | 8 | 7,4)$ )*

Die Punkte  $M$  und  $N$  liegen auf der Geraden  $m: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 8 \\ 7,4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$ , die

im Modell die Neigung der Dachfläche der Gaube festlegt. Die zur  $x_3$ -Achse parallele Strecke  $[NL]$  stellt im Modell den sogenannten Gaubenstiel dar; dessen Länge soll 1,4 m betragen. Um die Koordinaten von  $N$  und  $L$  zu bestimmen, wird die Ebene  $F$  betrachtet, die durch Verschiebung von  $E$  um 1,4 in positive  $x_3$ -Richtung entsteht.

3      **e)** Begründen Sie, dass  $3x_1 + 4x_3 - 49,6 = 0$  eine Gleichung von  $F$  ist.

4      **f)** Bestimmen Sie die Koordinaten von  $N$  und  $L$ .

*(Teilergebnis:  $N(7,2 | 8 | 7)$ )*